

УДК 517.9

DOI 10.29141/2949-477X-2025-4-4-5

EDN NRALQZ

О гарантированном управлении параболической задачей с препятствием

О. А. Никишина, Т. В. Пяткова

Северо-Казахстанский университет имени Манаша Козыбаева, г. Петропавловск, Республика Казахстан

Аннотация

Статья посвящена исследованию проблемы гарантированного управления параболическими дифференциальными уравнениями с ограничениями, связанными с препятствиями на уровне системы. Анализируются методы обеспечения выполнения ограничений при достижении целевых состояний в конечный момент времени. Особое внимание уделяется использованию барьерных функций, оптимальных стратегий и методов стабилизации для разработки управлений, гарантирующих выполнение условий безопасности и эффективности. Научная новизна работы заключается в разработке конструктивного алгоритма гарантированного управления для параболической задачи с препятствием. Алгоритм основан на адаптации метода управления моделью к классу вариационных неравенств. Полученные результаты способствуют развитию теории управления системами с ограничениями и имеют практическое значение для моделирования и контроля процессов в теплофизике, химической промышленности и биомедицине.

Ключевые слова:

гарантированное управление; параболическая задача; задача с препятствием; вариационная неравенность; управление с ограничениями состояния; свободная граница.

Дата поступления статьи: 10 ноября 2025 г.

Для цитирования: Никишина О. А., Пяткова Т. В. О гарантированном управлении параболической задачей с препятствием // Цифровые модели и решения. 2025. Т. 4, № 4. С. 59–68. DOI: 10.29141/2949-477X-2025-4-4-5. EDN: NRALQZ.

On guaranteed control of the parabolic obstacle problem

O. A. Nikishina, T. V. Pyatkova

M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavl, Kazakhstan

Abstract

The article deals with the study on the issue of guaranteed control of parabolic differential equations with constraints related to obstacles at the system level. The paper analyses methods for ensuring compliance with constraints when target states are achieved at a final point in time. The study pays particular attention to the utilisation of barrier functions, optimal strategies and stabilisation methods for the development of controls that guarantee the fulfilment of safety and efficiency conditions. The scientific novelty of the research lies in the development of a constructive algorithm for guaranteed control of a parabolic obstacle problem. The algorithm relies on adapting the model control method to a class of variational inequalities. The results obtained contribute to the development of the theory of controlling systems with constraints

and have practical significance for modelling and controlling processes in thermophysics, the chemical industry, and biomedicine.

Keywords:

guaranteed control; parabolic problem; obstacle problem; variational inequality; control with state constraints; free boundary.

Paper submitted: November 10, 2025.

For citation: Nikishina O. A., Pyatkova T. V. On guaranteed control of the parabolic obstacle problem. *Digital Models and Solutions*. 2025. Vol. 4, no. 4, pp. 59–68. DOI: 10.29141/2949-477X-2025-4-4-5. EDN: NRALQZ.

Введение

Для решения проблемы гарантированного управления параболической задачей с препятствием в ходе исследования предложен алгоритм, основанный на методе управления моделью. Данный подход ориентирован на работу с нелинейными динамическими системами и обеспечивает конструктивную реализацию алгоритмов, устойчивых к информационным помехам и вычислительным погрешностям.

Так, цель статьи – разработать и обосновать методы гарантированного управления для параболической задачи с препятствием, обеспечивающие существование управляющих воздействий, которые гарантируют заданные показатели качества и соблюдение препятствий.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- формализовать параболическую задачу с препятствием;
- доказать существование гарантированного оптимального управления.

В настоящее время последователями исследований в области гарантированного управления параболических задач с препятствиями предложена классическая теория парковых вариационных неравенств [1], доказаны существование и единственность слабых решений, базовая регулярность, свойства свободной границы при дополнительных предположениях [2], разработана теория оптимального управления, включая концепции лагранжевых множителей, вариационные неравенства первого порядка [3].

Интерес к задачам этого класса перешел на более высокий уровень актуальности в начале XXI в., когда стали активно исследовать возможности управления систем с препятствием, в том числе достижения заданных состояний, их регулирование и минимизацию времени / энергии при ограничениях на состояние.

Постановка задачи

Исследуется задача устойчивого управления одним классом распределенных систем. Кратко ее суть можно сформулировать следующим образом. Движение динамической системы Σ рассматривается на заданном временном интервале $T = [t_0, \vartheta]$. Траектория системы $x(t) = x(t; u(\cdot), v(\cdot))$, $t \in T$, зависит от изменяющегося со временем неизвестного входа и управления $u = u(t) \in P$. Множества P и Q заданы. На интервале T вводится равномерное разбиение:

$$\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \tau_0 = t_0, \tau_m = \vartheta, \tau_{i+1} - \tau_i = \delta.$$

При дискретных моментах τ_i с ограниченной погрешностью фиксируются фазовые состояния системы. Сформулирована задача синтеза управляющего закона по обратной связи для системы Σ , который гарантировал бы сохранение заранее заданных свойств траекторий при действии любых допустимых входов $v = v(\cdot)$.

Перейдем к более детальной формулировке задачи. Пусть система Σ – параболическая задача с препятствием. В этом случае она описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} x_t(t, \eta) - \Delta_L(t, \eta) &= a(\eta)f(t, u(t), v(t)) + F(t, \eta) \\ \text{п.в.в. } [(t, \eta) \in T \times \Omega : x(t, \eta) > \mu(\eta)]; \\ x_t(t, \eta) &= \max\{a(\eta)f(t, u(t), v(t)) + F(t, \eta) + \Delta_L \mu(\eta), 0\} \\ \text{п.в.в. } [(t, \eta) \in T \times \Omega : x(t, \eta) > \mu(\eta)]; \\ x(t, n) &\geq \mu(\eta) \text{ при всех } t \in T \text{ и почти всех } \eta \in \Omega; \\ x &= 0 \text{ в } \Gamma \times T, F(\cdot) \in L_2(T; L_2(\Omega)); \\ x_t(t, \eta) &= \max\{a(\eta)f(t, u(t), v(t)) + F(t, \eta) + \Delta_L \mu(\eta), 0\} \\ x_0(\eta) &\in H_1^0(\Omega), x_0(\eta) \geq \mu(\eta) \forall t \in T \text{ почти всюду в } \Omega; \\ \psi &\in H_2(\Omega), \psi(\sigma) \leq 0 \text{ почти всюду в } \Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения (1) эквивалентны следующему включению:

$$\begin{aligned} a(\eta)f(t, u(t), v(t)) &\in x_t(t, \eta) - \Delta_L x(t, n) + \beta(x(t, \eta)) - F(t, \eta), (t, n) \in T \times \Omega; \\ \beta(r) &= 0, \text{ если } r > 0; \beta(0) = (-\infty, 0]; \beta(r) = 0 \text{ для } r < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\Omega \in R^n$ – односвязная область с достаточно гладкой границей Γ . Обозначим Δ_L оператором Лапласа: $\Delta_L x(\eta) = \sum_{j=1}^n \delta^2 x(\eta) / \delta \eta_j^2$; $f(t, n) \in L_2(T; L_2(\Omega))$. Пусть T – временной интервал. Коэффициент $a(\eta) \in L_\infty(\Omega)$. Нелинейная функция $f(t, u, v) : T \times R^n \times R^M \rightarrow R$ непрерывна по совокупности переменных. Для простоты будем считать, что $\mu = 0$.

Рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть система (1) функционирует на заданном временном интервале T . Ее решение $x(t) = x(t; u(\cdot), v(\cdot))$ зависит от некоторого управления $u = u(t) \in P \subset R^n$ и возмущения $v = v(t) \in Q \subset R^M$. Фиксируем равномерную сетку $\Delta = \{\tau_i\}_i^m = 0, \tau_0 = t_0, \tau^m = \vartheta$, с диаметром $\delta = \delta(\Delta) = \tau_i - \tau_{i-1}$. Фазовые состояния $x(\tau_i)$ неточно измеряются в моменты времени τ_i . Результаты измерений $\xi_i \in H$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\xi_i - x(\tau_i)|_H \leq h, i \in [0 : m - 1]. \quad (3)$$

Также заданы непустое множество $M \subset L_2(\Omega)$ и число $\varepsilon > 0$. Необходимо разработать алгоритм синтеза управляющего закона по принципу обратной связи для системы Σ , удовлетворяющий приведенному ниже условию: каково бы ни было возмущение $v = v(t) \in Q$, расстояние между фазовой траекторией $x(t) \in L_2(\Omega)$ и множеством M в момент времени $t = \vartheta$ не превосходит значения ε , при условии, что величины h и δ достаточно малы.

$x(\cdot) = x(\cdot; U_\Delta, v(\cdot))$ – траектория системы Σ , порожденная неконтролируемым возмущением $v(\cdot)$ и управлением $u(\cdot)$, формируемым по принципу обратной связи

$$u(t) = u(t; \xi) = U(\tau_i, \xi_i), t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Это означает, что в каждый момент времени $\tau_i \in \Delta$, $i \in [0 : m - 1]$, функция $u(t)$, $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, вычисляется согласно заданному правилу U . Эта функция подается на вход системы Σ на интервале $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$.

Таким образом, задача состоит в построении алгоритма управления нелинейной системой (1), который минимизирует расстояние от фазовой траектории системы до некоторого заданного множества в конечный момент времени. Не будем останавливаться на структуре возмущения $v(\cdot)$; к примеру, управление, максимизирующее указанное выше расстояние, может играть роль такого возмущения. Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, теория решения таких задач развита в работах [4–6]. В данной статье используются идеи из этих работ для управления системой вида (2).

Алгоритм решения задачи

Пусть $(\cdot)_H$ и $|\cdot|_H$ – скалярное произведение и норма в пространстве $H = L_2(\Omega)$ соответственно:

$$V = H_0^1(\Omega); P(T) = \{u(\cdot) \in L_2(T; R^N) : u(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}; \\ Q(T) = \{v(\cdot) \in L_2(T; R^M) : v(t) \in Q \text{ при п.в. } t \in T\},$$

где P и Q – фиксированные выпуклые, замкнутые и ограниченные подмножества соответствующих пространств управляющих воздействий. Для любой пары $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in P(T) \times Q(T)$, решением системы называется функция $x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot), v(\cdot))$, которая в силу (2) реализует динамику системы и имеет следующие свойства:

$$x(\cdot) \in C(T; V), x_i(\cdot) \in L_2(T; H); t \rightarrow \Delta_L x(t) \in L_2(T; H).$$

Предположим, что $x_0 \in D = V \cap K$.

Таким образом, по результату (1) решение уравнения [4] существует и является единственным. Обозначим:

$$f_u(t, v) = \text{co}[f : f = f(t, u, v), u \in P]; H(t) = \bigcap_{v \in Q} f(t, v); \\ H(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; L_2(\Omega) \times R); \\ u(\eta, t) = a(\eta) \tilde{u}(t), \tilde{u}(t) \in H(t) \text{ при п.в. } t \in T\};$$

$\omega_f(\delta)$ – модуль непрерывности функции f , то есть

$$\omega_f(\delta) = \sup \{|f(t_1, u, v) - f(t_2, u, v)| : t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| \leq \delta, u \in P, v \in Q\}.$$

Здесь символ $\text{co}D$ означает замыкание выпуклой оболочки множества D . Введем условия:

- а) множества $H(t)$ для всех $t \in T$ непусты;
- б) найдется управление $u^*(\cdot) \in H(\cdot)$, которое переводит фазовую траекторию системы

$$a(\eta) u^*(t) \in x_t^0(t, \eta) - \Delta_L x^0(t, \eta) + \beta(x^0(t, \eta)) - F(t, \eta), (t, \eta) \in T \times \Omega; \\ x^0(t, \eta)|_{\Gamma} = 0, t \in T, x^0(t_0, \eta) = x_0(\eta), \eta \in \Omega \quad (4)$$

на множество M в конечный момент времени ϑ ;

в) выполняется условие седловой точки ($s = \pm 1$).

Опишем *структуру алгоритма решения* рассматриваемой задачи, опираясь на подход, развиваемый в работах [7–9]. Перед началом вычислений на временном отрезке T задаем

равномерное разбиение разбиение $\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$, с шагом $\delta = \delta(h) = \delta(\Delta_h)$ с шагом $h \in (0, 1)$. Затем вводим управление системой (1) по закону обратной связи так, чтобы при произвольном возмущении $v(\cdot) \in Q(T)$ и при достаточно малых значениях h и δ и соответствующего параметра движение $x_h(\cdot) = x(\cdot; U_{\Delta_h}, v(\cdot))$ в момент ϑ попадало в небольшую окрестность заданного множества M^ε . Алгоритм разбит на $(m - 1)$ однотипных шагов. На i -м шаге, выполняющемся на отрезке $\delta_i = \delta_h$, $i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, производятся следующие операции. Сначала вычисляется величина u_i^e по формуле:

$$\max s_i^* f(\tau_i, u_i^e, v) \leq \inf \max s_i^* f(\tau_i, u_i^e, v) + h, \quad (5)$$

где $s_i^* = (\xi_i - \psi_i, a)_H$, $|\psi_i - x^0(\tau_i)|_H \leq h$.

После этого (при $t \in \delta_i$) на вход системы (1) подается постоянное управление вида:

$$u(t) = u_i^e, t \in \delta_i, \quad (6)$$

то есть предполагается, что

$$U(\tau_i, \xi_i) = u_i^e, t \in \delta_i. \quad (7)$$

Вследствие применения заданного закона управления при наличии некоторого неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$ система (1) переходит из состояния $x_h(\tau_i)$ в состояние $x_h(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i + 1)$ -м шаге описанные действия повторяются. Алгоритм завершает работу в момент $t = 9$.

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_* > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\inf \{ |x_h(\vartheta) - p|_H : p \in M \} \leq \varepsilon, \text{ если } h \leq h_*.$$

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, приведем одно вспомогательное утверждение. Введем функционал

$$\begin{aligned} l(y(\cdot)) &: W^{1,2}(T; H) \cap L_2(T; V) \rightarrow R; \\ l(y(\cdot)) &= |y(\cdot)|_{C(T; H)} + |y_t(\cdot)|_{L_2(T; H)} + |y(\cdot)|_{L_2(T; H)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь производная понимается в обобщенном смысле [10]:

$$W^{1,2}(T; H) = \{x(\cdot) \in L_2(T; H) : x_t(\cdot) \in L_2(T; H)\}.$$

Лемма. Существует число K_* такое, что для любого

$$u(\cdot) \in P(T), v(\cdot) \in Q(T), x(\cdot) = x(\cdot; u(\cdot), v(\cdot))$$

справедливо неравенство $l(x(\cdot)) \leq K_*$.

Доказательство леммы проводится по стандартной схеме [10].

Схема доказательства теоремы. Пусть фиксировано разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=1}^m$ интервала T с шагом $\delta(\Delta) = \delta$. Оценим изменение функции $\varepsilon(t; x_h(\cdot)) = \frac{1}{2} |x_h(t) - x^0(t)|_H^2$ при T . Здесь $x^0(t)$ – решение включения (4). Векторы v_i^e определяются из условия:

$$\min s_i^*(\tau_i, u, v_i^e) \leq \sup \min s_i(\tau_i, u, v) + h. \quad (9)$$

Очевидно, что:

$$H(t) \subset f_u(t, v_i^e), t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

По условию а), согласно теореме Каратеодори [11; 12], справедливо следующее представление:

$$u^*(t) = \sum_{r=1}^2 a_{t,r} f(t, u_t^{(r)}, v_t^e); a_{t,r} \geq 0, a_{t,1} + a_{t,2} = 1, u_t^{(r)} \in P. \quad (10)$$

Вычитая правую и левую части включений (2) и (4) соответственно, на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ получим:

$$\begin{aligned} x_t(t, \eta) - x_t^0(t, \eta) - \Delta_L(x(t, \eta) - x^0(t, \eta)) + \bar{\beta}(x(t, \eta)) - \bar{\beta}(x^0(t, \eta)) = \\ = a(\eta) (f(t, u_t^e, v(t)) - u^*(t)), (t, \eta) \in T \times \Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

где:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(x(t, \eta)) &= a(\eta) (f(t, u_t^e, v(t)) + F(t, \eta) + \Delta_L x(t, \eta) - x_t(t, \eta)) \in \beta(x(t, \eta)); \\ \bar{\beta}(x^0(t, \eta)) &= a(\eta) (f(t, u_t^e, v(t)) + F(t, \eta) + \Delta_L x^0(t, \eta) - x_t^0(t, \eta)) \in \beta(x^0(t, \eta)). \end{aligned}$$

Заметим, что отображение $z \rightarrow \beta(z)$ максимально монотонно [13], следовательно, справедливо следующее неравенство:

$$\int (\bar{\beta}(x(t, \eta)) - \bar{\beta}(x^0(t, \eta))) (x(t, \eta) - x^0(t, \eta)) d\eta \geq 0. \quad (12)$$

Кроме того, по формуле Грина имеем:

$$\begin{aligned} \int (\Delta_L(x(t, \eta))) - \int (\Delta_L(x(t, \eta) - x^0(t, \eta))) (x(t, \eta) - x^0(t, \eta)) d\eta = \\ = \int |\nabla(x(t, \eta) - x^0(t, \eta))|^2 d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Символ $\nabla x(\eta)$ означает градиент функции $\eta \rightarrow x(\eta)$, а символ $|\cdot|$ —евклидову норму. Теперь умножим правую и левую части равенства (11) на $(x(t, \eta) - x^0(t, \eta))$. После интегрирования по η , учитывая отношения (12) и (13), получим (для п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$):

$$\begin{aligned} \int (x_t(t, \eta) - x_t^0(t, \eta)) (x(t, \eta) - x^0(t, \eta)) d\eta + \int |\nabla(x(t, \eta) - x^0(t, \eta))|^2 d\eta \leq \\ \leq (f(x(t, u_t^e, v(t)) - u^*(t)) \int a(\eta) (x(t, \eta) - x^0(t, \eta)) d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14), согласно (10), следует, что для п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geq 0$, справедливо неравенство:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t; x_h(\cdot), x^0(\cdot)) \leq (f(t, u_t^e, v(t)) - \sum_{r=1}^2 a_{t,r} f(t, u_t^{(r)}, v_t^e) (a, x_h(t) - x^0(t)))_H. \quad (15)$$

Здесь u_t^e вычисляется по формуле (6); $v(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, неизвестная реализация возмущения; правило $U(t, x)$ определено формулами (6), (7). Из (15) следует, что:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon(t; x_h(\cdot), x^0(\cdot)) \leq (f(\tau_i, u_i^e, v(t)) - \sum_{r=1}^2 a_{t,r} f(\tau_i, u_i^{(r)}, v_i^e) s_i^* + \\ + k_1 (h + \omega_f(\delta) + \int \{|x_{h,\tau}(\tau)|_H + |x_\tau^0(\tau)|_H\} d\tau), t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что из определения векторов u_i^e (6) v_i^e согласно условию (9), следуют неравенства:

$$s_i^* f(\tau_i, u_i^e, v(\tau_i + \tau)) \leq f(s_i^* f(\tau_i, u_{\tau_i + \tau}^{(r)}, v_i^e), \tau \in [0, \delta].$$

Умножая неравенства на $a_{\tau_i + \tau, r}$ и суммируя по r , получим:

$$s_i^* f(\tau_i, u_i^e, v(\tau_i + \tau)) \leq s_i^* \sum_{r=1}^2 a_{\tau_i + \tau, r} f(\tau_i, u_{\tau_i + \tau}^{(r)}, v_i^e), \tau \in [0, \delta]. \quad (17)$$

Используя формулы (16) и (17), выводим:

$$\varepsilon(t; x_h(\cdot)) \leq \varepsilon(\tau_i; x_h(\cdot), x^0(\cdot)) + k_1 \delta(h + \omega_f(\delta) + \int_{\tau_i}^{\tau_i+1} \{|x_{h,t}(\tau)|_H + |x_\tau^0(\tau)|_H\} d\tau, t \in \delta_i. \quad (18)$$

Если:

$$\varepsilon(t_0; x_h(\cdot), x^0(\cdot)) = 0, \quad (19)$$

то из выражений (18), (19) и леммы для $t \in T$ будем иметь:

$$\varepsilon(t; x_h(\cdot), x^0(\cdot)) \leq k_2 (\delta(h) + h + \omega_f(\delta)). \quad (20)$$

Утверждение теоремы следует из неравенства (20) и условия б). Теорема доказана.

Таким образом, если h достаточно мало, то расстояние от фазового состояния $x_h(\delta)$ системы (1) до множества M не превосходит заданной априори величины ε , каким бы ни было возмущение $v = v(t) \in Q$.

Алгоритмы гарантированного управления параболическими задачами с препятствием применяются, когда необходимо обеспечить выполнение этого ограничения при неизвестных возмущениях. Перечислим области применения задач данного класса:

- теплотехника – контроль фазового перехода, поддержание безопасной температуры;
- гидрогеология – управление уровнями в пористой среде с барьерами;
- энергетика – управление зарядом/температурой батарей;
- прикладные финансовые модели;
- задачи управления трафиком с ограничениями плотности.

Заключение

Гарантированное управление параболическими задачами с препятствиями – важная и сложная задача, требующая использования современных методов оптимизации, теории множеств и стабилизации. Разработка эффективных стратегий позволяет не только обеспечить выполнение ограничений, но и достичь целевых состояний в условиях неопределенности и возмущений. В дальнейшем перспективными направлениями являются интеграция численных методов, исследование более сложных нелинейных систем и расширение теоретических основ гарантированного управления.

Дальнейшие исследования целесообразно сосредоточить на нескольких взаимодополняющих направлениях: изучение дифференцируемости и чувствительности отображения «управление → состояние» с учетом временной структуры и влияния свободной границы, а также разработка масштабируемых численных методов для online управления и параллельных вычислений.

Источники

1. Mei H., Zhao T., Tang Sh. et al. GRSDet: Learning to Generate Local Reverse Samples for Few-shot Object Detection. *Neurocomputing*. 2025. Vol. 651, 130903. DOI: 10.1016/j.neucom.2025.130903. EDN: ALTXCG.
2. Erfanifar R., Hajarian M. High-efficiency parametric iterative schemes for solving nonlinear equations with and without memory. *Journal of Complexity*. 2025. Vol. 86, 101896. DOI: 10.1016/j.jco.2024.101896. EDN: UGZDKB.
3. Chen H., Stynes M. A discrete comparison principle for the time-fractional diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 2020. Vol. 80, no. 5, pp. 917–922. DOI: 10.1016/j.camwa.2020.04.018. EDN: WOGCBR.

4. Максимов В. И., Осипов Ю. С. Экстремальный сдвиг в задаче отслеживания возмущения параболического включения, описывающего двухфазную задачу Стефана // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 191–206. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-191-206. EDN: IEJFMN.
5. Kolyeva N. Organization of multi-access in databases. E3S Web of Conferences (Almaty, May 20–21, 2021). Vol. 270, 01006. DOI: 10.1051/e3sconf/202127001006. EDN: AXTTSV.
6. Неустроева Л. В., Шморган С. А. Обратные задачи об определении точечных источников в параболических задачах // Математические заметки СВФУ. 2025. Т. 32, № 2. С. 96–97. DOI: 10.25587/2411-9326-2025-2-96-97. EDN: ZUVP GK.
7. Гольдман Н. Л. Некоторые задачи управления и обратные задачи для линейных параболических уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2016. Т. 17, № 3. С. 280–290. DOI: 10.26089/NumMet.v17r326. EDN: VRHRPL.
8. Кольева Н. С., Панов М. А., Кузнецов В. Е. и др. Разработка прототипа программного обеспечения для программно-аппаратного комплекса «Инспекция маркировки» // Программная инженерия. 2025. Т. 16, № 1. С. 47–56. DOI: 10.17587/prin.16.47-56. EDN: TDPEPG.
9. Кислов В. И. Пространственно-нелокальные краевые задачи и задачи с интегральными условиями для параболических уравнений // Парадигма. 2025. № 5–5. С. 113–117. EDN: IZTTDX.
10. Attaev A. Kh., Ramazanov M. I., Omarov M. T. On the Correctness of Boundary Value Problems for the Two-Dimensional Loaded Parabolic Equation. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022. No. 4 (108), pp. 34–41. DOI: 10.31489/2022M/34-41. EDN: EGQCQQ.
11. Dekhkonov F. N. On the time-optimal control problem for a fourth order parabolic equation in a two-dimensional domain. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024. No. 2 (114), pp. 57–70. DOI: 10.31489/2024M2/57-70. EDN: EBOIKQ.
12. Krivosheeva Yu. Yu., Slobozhanina N. A. Boundary value problems for parabolic equations with different boundary conditions. *Proceedings of Young Scientists and Specialists of Samara University*. 2020. No. 1 (16), pp. 184–187. EDN: HPWFCV.
13. Bachmar A., Ouchenane D. A problem with Wear Involving Thermo-electro-viscoelastic Materials. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2022. Vol. 15, no. 2, pp. 241–254. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-2-241-254.

References

1. Mei H., Zhao T., Tang S., Qiu H., Wang L., Zhang M., ... Li H. GRSDet: Learning to generate local reverse samples for few-shot object detection. *Neurocomputing*. 2025. Vol. 651, 130903. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2025.130903>. EDN: <https://elibrary.ru/altxcg>.
2. Erfanifar R., Hajarian M. High-efficiency parametric iterative schemes for solving nonlinear equations with and without memory. *Journal of Complexity*. 2025. Vol. 86, 101896. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jco.2024.101896>. EDN: <https://elibrary.ru/ugzdkb>.
3. Chen H., Stynes M. A discrete comparison principle for the time-fractional diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 2020. Vol. 80, issue 5, pp. 917–922. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.04.018>. EDN: <https://elibrary.ru/wogcbr>.

4. Maksimov V. I., Osipov Yu. S. Ekstremal'nyy sdvig v zadache otslezhivaniya vozmushcheniya parabolicheskogo vklyucheniya, opisyyayushchego dvukhfaznyuyu zadachu Stefana [Extremal shift in the problem of tracking a disturbance in a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2024. Vol. 30, no. 3, pp. 191–206. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-3-191-206>. EDN: <https://elibrary.ru/iejfmn>. (in Russ.)
5. Kolyeva N. Organization of multi-access in databases. In: Nazarov A. D. (Ed.). Proc. of the Int. sci. forum on computer and energy sciences (Almaty, May 20–21, 2021). E3S Web of Conferences. Vol. 270, 01006. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202127001006>. EDN: <https://elibrary.ru/axttsv>.
6. Neustroeva L. V., Shmorgan S. A. Obratnye zadachi ob opredelenii tochechnykh istochnikov v parabolicheskikh zadachakh [Inverse problems of identification of pointwise sources in parabolic problems]. *Matematicheskie zametki SVFU*. 2025. Vol. 32, no. 2, pp. 96–97. DOI: <https://doi.org/10.25587/2411-9326-2025-2-96-97>. EDN: <https://elibrary.ru/zuvpgk>. (in Russ.)
7. Gol'dman N. L. Nekotorye zadachi upravleniya i obratnye zadachi dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy [Some control and inverse problems for linear parabolic equations]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2016. Vol. 17, no. 3, pp. 280–290. DOI: <https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r326>. EDN: <https://elibrary.ru/vrhrpl>. (in Russ.)
8. Kolyeva N. S., Panov M. A., Kuznetsov V. E., Yarochkina K. D., Perestenko K. A. Razrabotka prototipa programmnoy obespecheniya dlya programmno-apparatnogo kompleksa «Inspektsiya markirovki» [Development of prototype software for the hardware-software complex "Marking Inspection"]. *Programmnyaya inzheneriya*. 2025. Vol. 16, no. 1, pp. 47–56. DOI: <https://doi.org/10.17587/prin.16.47-56>. EDN: <https://elibrary.ru/tdpepg>. (in Russ.)
9. Kislov V. I. Prostranstvenno-nelokal'nye kraevye zadachi i zadachi s integral'nymi usloviyami dlya parabolicheskikh uravneniy [Spatially non-local boundary value problems and problems with integral conditions for parabolic equations]. *Paradigma*. 2025. No. 5-5, pp. 113–117. EDN: <https://elibrary.ru/izttdx>. (in Russ.)
10. Attaev A. Kh., Ramazanov M. I., Omarov M. T. On the correctness of boundary value problems for the two-dimensional loaded parabolic equation. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022. No. 4 (108), pp. 34–41. DOI: <https://doi.org/10.31489/2022M/34-41>. EDN: <https://elibrary.ru/egqcqq>.
11. Dekhkonov F. N. On the time-optimal control problem for a fourth order parabolic equation in a two-dimensional domain. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024. No. 2 (114), pp. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.31489/2024M2/57-70>. EDN: <https://elibrary.ru/eboikq>.
12. Krivosheeva Yu. Yu., Slobozhanina N. A. Boundary value problems for parabolic equations with different boundary conditions. *Vestnik molodykh uchenykh i spetsialistov Samarskogo universiteta*. 2020. No. 1 (16), pp. 184–187. EDN: <https://elibrary.ru/hpwfcv>.
13. Bachmar A., Ouchenane D. A problem with wear involving thermo-electro-viscoelastic materials. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika*. 2022. Vol. 15, no. 2, pp. 241–254. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-2-241-254>. EDN: <https://elibrary.ru/drznjg>.

Информация об авторах

Никишина Ольга Александровна, магистр, старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий. Северо-Казахстанский университет имени М. Козыбаева, 150000, Республика Казахстан, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86. E-mail: opronina@ku.edu.kz

Пяткова Татьяна Владимировна, магистр, старший преподаватель кафедры информационно-коммуникационных технологий. Северо-Казахстанский университет имени М. Козыбаева, 150000, Республика Казахстан, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86. E-mail: tanya.pyatkova@mail.ru

Information about the authors

Olga A. Nikishina, Master, Sr. Lecturer of Information and Communication Technologies Dept. M. Kozybayev North Kazakhstan University, 150000, Kazakhstan, Petropavl, Pushkin St., 86. E-mail: opronina@ku.edu.kz

Tatyana V. Pyatkova, Master, Sr. Lecturer of Information and Communication Technologies Dept. M. Kozybayev North Kazakhstan University, 150000, Kazakhstan, Petropavl, Pushkin St., 86. E-mail: tanya.pyatkova@mail.ru